PARADOJAS MATEMÁTICAS

Se llaman paradojas matemáticas ciertos resultados notoriamente falsos que parecen deducirse de demostraciones rigurosas, pero durante las cuales se ha efectuado una operación que no tiene sentido, o un razonamiento erróneo, o, aún, una construcción geométrica cuyo trazado no es correcto.

Primera Paradoja: 1 = 2.

Sean dos números iguales, a y b; escribimos: $b = a$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por el mismo número a, tenemos:

$$b \times a = a^2$$

restando a ambos miembros el mismo número b^2, resulta,

$$b \times a - b^2 = a^2 - b^2$$

que puede escribirse así:

$$b \times (a - b) = (a + b) \times (a - b)$$

Dividiendo los dos miembros por $(a - b)$, tenemos,

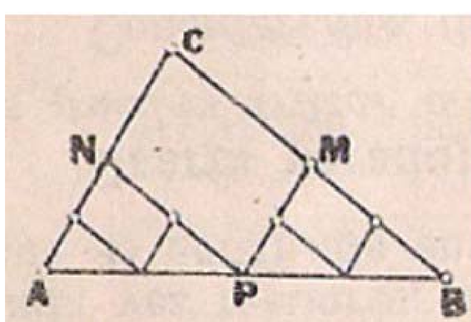
$$b = b + b\text{, o sea, } b = 2\,b\text{, de donde, } 1 = 2.$$

Este resultado paradojal se explica fácilmente. En efecto, pueden dividirse los dos miembros de una igualdad por un mismo número *con la condición que ese divisor sea diferente de cero*. Pero en el ejemplo tratado hemos dividido los dos miembros de una igualdad por $(a - b)$ que, por hipótesis, es una cantidad nula, operación ilícita que nos condujo al resultado absurdo: 1 = 2.

Segunda Paradoja

En todo triángulo rectángulo, cada lado es igual (?) a la suma de los otros dos.

Sea el triángulo ABC (figura a) y M, N, P, los puntos medios de sus lados; tracemos las rectas MP y NP.



Por haberse formado un paralelogramo *MPNC*, resulta:

$$AN + NP + PM + MB = AC + CB$$

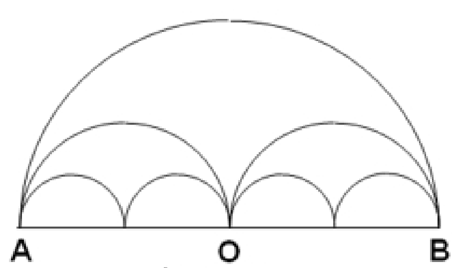
Efectuando una construcción análoga para los triángulos *ANP*, *PMB*, y continuando de ese modo indefinidamente, vemos que las líneas quebradas sucesivamente formadas tienen siempre su longitud igual a (*AC* + *CB*). Como la longitud de los segmentos que forman la línea quebrada disminuye constantemente, y sus vértices se aproximan cada vez más a la recta AB, decimos que *en el límite, el perímetro de las líneas quebradas llega a confundirse con AB, y, por consiguiente, AB= AC + CB*.

Esta paradoja se explica por la falsa interpretación del término "límite", cuya definición correcta es: "Decimos que una magnitud *variable x tiende hacia un límite determinado A*, si los valores sucesivos de *x se aproximan al número A* de modo que el valor absoluto de la diferencia (*x* - *A*) pueda llegar a ser menor que todo el número positivo dado, por pequeño que este sea".

En el ejemplo tratado, *x* y *A* son, respectivamente, el perímetro de las líneas quebradas y la longitud del lado *AB*. Pero *x es constante* y no variable, y la diferencia (*x* – *A*) es también constante. No siendo lícito aplicar la noción de límite a magnitudes que no satisfacen las condiciones de la definición precedente, no es de extrañarse, pues, que en el caso tratado se haya llegado a un resultado absurdo.

Tercera Paradoja

Con un razonamiento análogo al de la paradoja anterior puede establecerse que *una semicircunferencia es igual (?) a su diámetro*.



(figura *b*)

Para ello se trazan dos semicircunferencias (figura *b*) que tengan por diámetros los radios *OA* = *OB* = *R* de una semicircunferencia dada. Esta última tiene por longitud πR, y la suma de las otras dos es:

$$\pi * R/2 + \pi * R/2 = \pi * R$$

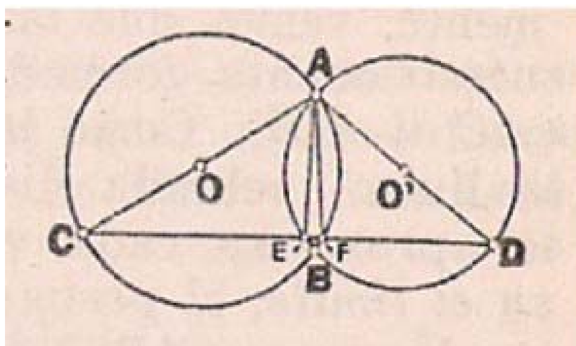
o sea, igual a la primera.

Continuando con la misma construcción indefinidamente, se tiene siempre la misma longitud πR para la línea formada por las 4, 8, 16, … semicircunferencias, las que, por ser cada vez menores, nos inducen a decir que forman una línea que se confunde con el diámetro *AB*, o sea, $\pi R = AB$.

Cuarta Paradoja

Por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos (?) perpendiculares a dicha recta.

Consideremos dos circunferencias (figura *c*) de centros *O* y *O'*, que se cortan en *A* y *B*.



Tracemos los diámetros *AC* y *AD*, y luego unamos *C* con *D*, que corta las circunferencias en los puntos *E* y *F* (construcción a pulso). Tracemos las rectas AE y AF.

El ángulo *AFC*, por ser inscrito en un semicírculo (de centro *O*), es recto, e igualmente para el ángulo *AED* inscrito en un semicírculo (de centro *O'*). Por consiguiente *AF* y *AE* son dos perpendiculares a la recta *CD* trazadas desde *A*.

Puede verse inmediatamente que el trazado de la figura no es correcto: la recta *CD* debe pasar por *B*.