CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Desde épocas muy remotas, y entre todos los pueblos que cultivaban las ciencias, es probable que se hayan propuesto y resuelto "problemas curiosos", es decir, problemas que despiertan el interés, ya sea por su enunciado de concepción entretenida, ya por lo ingenioso de las soluciones, o porque la respuesta verdadera no es, generalmente, la primera que se nos ocurre.

Eminentes matemáticos se han ocupado de problemas de esta índole que, además de servir de recreo y entretenimiento, ejercitan la inteligencia del lector y, en consecuencia, lo preparan para resolver, con mayor facilidad, otros problemas que han de presentársele, frecuentemente, en la vida práctica.

Nuestra experiencia en la didáctica de la Matemática nos permite afirmar que la proposición adecuada y resolución de esta índole de problemas en las clases de enseñanza media, constituye un valioso expediente al cual debe recurrir el profesor para hacer sus clases más amables y atrayentes; tan es así, que lo establecen expresamente los programas oficiales de Matemática de la mayoría de las instituciones de enseñanza.

Los autores consultados, entre otros, han sido: Ghersi, Peano, Boucheny, Fourrey, Lucas y Gratz.

PROBLEMAS CURIOSOS

Se incluyen en esta colección algunos problemas capciosos; se llama así aquellos cuya verdadera solución no es, generalmente, la primera que se nos ocurre.

El Problema Del Sastre

Un sastre tiene una pieza de paño de 12 metros de longitud, y todos los días corta 2 mts. ¿Al cabo de cuántos días habrá cortado completamente la pieza?

Respuesta. – Evidentemente, en 5 días (y no en 6, como suelen contestar los escolares distraídos).

El Caracol Viajero

Un caracol –por asuntos particulares- desea trasladarse de una huerta a otra, vadeando el muro de separación, que tiene 5 metros de altura; trepa verticalmente por el muro recorriendo cada día 3 metros, y desciende (¡caprichos de caracol!), también verticalmente, cada noche, 2 metros, de modo que cada día avanza, en efectivo, 1 metro de su ruta. ¿En cuántos días llegará a la cima del muro?

Respuesta. – En 3 días (no en 5).

La Tarea De Una Polilla

En un estante se han colocado en forma ordenada, los tres tomos de "La Divina Comedia" de Dante, que constan de 100 páginas cada uno. Una polilla empezó por taladrar la primera hoja del primer tomo y, prosiguiendo horizontalmente en el mismo sentido, dio término a su tarea con la última hoja del último tomo. ¿Cuántas hojas taladró?

Respuesta. – 102 hojas, puesto que los volúmenes e hallan ordenados de izquierda a derecha, y las hojas de los volúmenes resultan ordenados de derecha a izquierda; y además, por hallarse adyacentes al segundo tomo, la primera hoja del primero, así como la última del tercero.

La Cabellera Humana

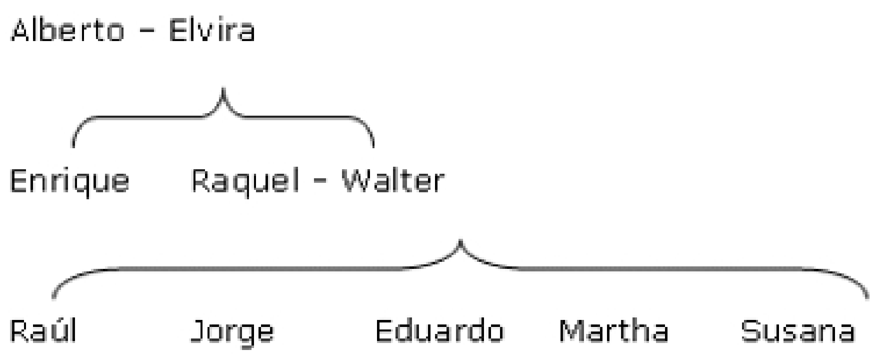
Demostrar que en una ciudad de 130.000 habitantes existen, por lo menos, dos personas con igual número de cabellos.

En efecto: un individuo –por cierto muy paciente y que poco tenía que hacer- contó y calculó que cada centímetro cuadrado del cuero cabelludo humano contiene, al máximo, 165 cabellos. Como la superficie referida de la cabeza humana es de unos 775 cms.^{2}, el número máximo de cabello que podrá tener una persona será 775 X 165, o sea, 127.875. podrá existir, pues, una persona con 1 cabello, otra con 2, otra con 3… , y así sucesivamente, hasta una última con el máximo de 127.875 cabellos. Como el número 130.000 es mayor que 127.875, podremos afirmar, pues, que por cada 130.000 habitantes debe repetirse un mismo número de cabellos, en otra cabeza.

Una Familia Numerosa Compuesta De Pocas Personas

Cierta familia está constituida por: un abuelo, una abuela, un suegro, una suegra, un yerno, tres hijas, cuatro hijos, dos padres, dos madres, tres nietos, dos nietas, cuatro hermanos, tres hermanas, dos cuñados, dos maridos, dos esposas, un tío, tres sobrinos y dos sobrinas. ¿En total 40 personas? No, solamente son 10. ¿Cómo está formada esa familia?

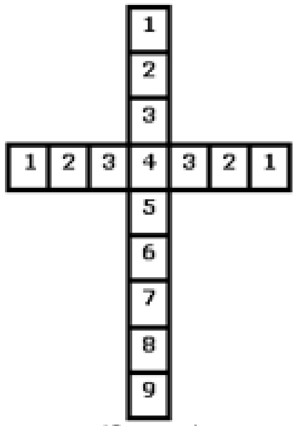
A continuación damos el cuadro genealógico:



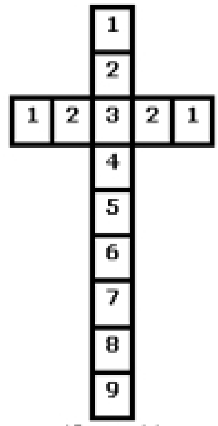
La Cruz De Brillantes

Una señora, bastante ingenua, entrega a un joyero una cruz de brillantes (representada en la figura a), haciéndole notar que conoce el número de brillantes que contiene, puesto que contándolos a partir de uno cualquiera de los extremos superiores hasta la parte inferior de la cruz, cuenta siempre nueve; pero el joyero, poco escrupuloso, se apropia de dos de los brillantes y le devuelve la cruz modificada de modo que la ingenua señora, efectuada la verificación en la forma acostumbrada, no se da cuenta del engaño. ¿Cuál es el truco usado por el joyero?

La respuesta se evidencia en la (figura b) que da una suma total de 13 brillantes en lugar de 15.



(figura a)



(figura b)

Los Diez Puchos De Cigarrillos

Un juntaduchos puede liar un cigarrillo con 3 puchos. Tiene 10. ¿Cómo logra fumar 5 cigarrillos?

Con los 10 puchos lía 3 cigarrillos y le sobra 1 pucho.

Fuma 3 cigarrillos, y tiene luego 4 puchos, con 3 de los cuales lia un cuarto cigarrillo que fuma, y tiene entonces 2 puchos.

Pide prestado 1 pucho a un amigo, lia un quinto cigarrillo, lo fuma, y devuelve el pucho prestado (como persona honrada que bien puede serlo el juntapuchos).

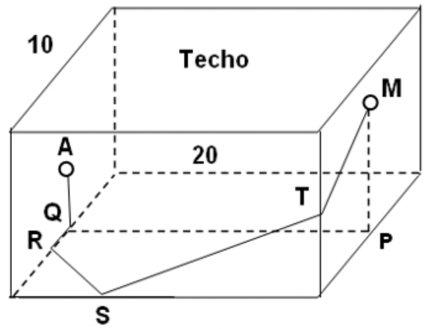
Ha fumado, pues, 5 cigarrillos.

Problema de la Mosca y la Araña

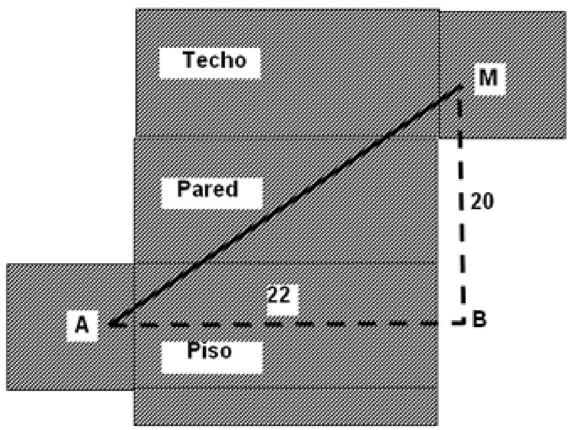
La (figura a) representa un salón, de piso rectangular, que tiene 20 metros de largo, 10 metros de ancho y 10 metros de alto.

Una mosca se encuentra en un punto M, en el eje vertical de la pared del frente, a un metro de distancia del techo; una araña se encuentra en el punto A, en el eje vertical de la pared del fondo, a un metro de distancia del piso. ¿Cuál es el camino más corto que deberá seguir la araña para atrapar la mosca? (Se sobreentiende que la trayectoria debe realizarse sobre paredes, piso o techo).

La solución que primeramente se le ocurrirá a la generalidad de las personas, es la línea quebrada *AQPM* trazada siguiendo los ejes de las paredes del fondo y del frente, también el del piso; la medida de esta trayectoria resulta de 1 + 20 + 9 = 30 metros.



(Figura a)



(Figura b)

Pero si desarrollamos la superficie del paralelepípedo como indica la (figura b), es evidente que el camino más corto sobre la superficie plana entre los muros *A* y *M* es la recta *AM*. Calculando la medida de este segmento como hipotenusa del triángulo rectángulo *ABM* de catetos 22 metros y 20 metros respectivamente, para lo cual aplicamos el famoso teorema de Pitágoras, encontramos:

$$AM = \sqrt{22^2 + 20^2} = \sqrt{884} = 29{,}73 \text{ metros}$$

que es menor que la anterior, que era de 30 metros.

No obstante, ésta última no es la verdadera solución del problema. En efecto, si desarrollamos el paralelepípedo como indica la (figura c), obtenemos otro triángulo rectángulo *ABM*, tal que $AM = \sqrt{26^2 + 14^2} = \sqrt{872} = 29{,}53 \text{ metros},$ solución menor aún que la anterior. Esta trayectoria se indica con la línea ARSTM en el paralelepípedo de la (figura a).

El Problema de los dos Vasos

Un vaso contiene vino, y otro, agua. Se vierte una cucharada de vino del primero en el segundo, y luego de mezclarse bien, se vierte igual cucharada de la mezcla del segundo vaso al primero. Se desea saber si la cantidad de vino transportada definitivamente del primer vaso al segundo, es mayor o menor que la de agua transportada del segundo al primero.

Respuesta. – Es igual.

Muchas personas contestan que la primera es mayor, lo que no es cierto; en efecto, existiendo en cada vaso, después de la operación, la misma cantidad de líquido que antes de ella, es necesario que tanto vino haya pasado del primero al segundo vaso, cuanto de agua del segundo al primero.

El Reloj Que Atrasa

Un reloj atrasa ¼ de minuto durante el día, pero, debido al cambio de temperatura, adelanta ⅓ de minuto durante la noche. ¿Al cabo de cuántos días habrá adelantado 2 minutos, sabiendo que hoy, al atardecer, marca la hora exacta?

Durante un día completo, el reloj adelanta:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ de minuto}$$

Muchos contestarán que el adelanto prefijado resultará al cabo de: $2 \div \frac{1}{12} = 24 \text{ días.}$

En realidad, al cabo de 20 días, al atardecer, el reloj habrá adelantado

$\frac{1}{12} x20 = \frac{5}{3} \text{ de minuto,}$ y, como por la noche adelanta ⅓ de minuto, al empezar la mañana siguiente al veinteavo día su adelanto será de $5/3 + 1/3 = 6/3 = 2 \text{ minutos.}$

El reloj empleará, pues, 20 días más la duración de una noche, para adelantar los 2 minutos indicados.

La Rebaja De Precios

Un comerciante, a fin de atraerse la clientela, anuncia conceder en sus ventas un 20% de descuento; peor, escrupuloso, modifica previamente los precios en ellas marcados sumándolos un 20%. ¿Qué descuento hace, en realidad, sobre los precios primitivos?

Respuesta. – El 4 por ciento.

En efecto, si el precio de una mercadería era, por ejemplo, $100, el precio modificado con el 20% de $120 prometido por el comerciante, o sea $24, resulta $96 como precio neto. El descuento efectivo es, pues, 100 – 96, o sea, 4 en 100.

El Problema De Las Dos Embarcaciones

Dos embarcaciones, A y B, parten en el mismo momento del puerto de Buenos Aires, para realizar una viaje de ida y vuelta a Río de Janeiro, distante unas 1200 millas. La embarcación A mantiene una velocidad de 8 millas por hora en el viaje de ida y 12 en el de vuelta; en cambio, la embarcación B mantiene la velocidad promedio de aquellas, o sea, de 10 millas por hora, tanto en el viaje de ida como el de vuelta. ¿Llegarán juntas al regreso a Buenos Aires?

Respuesta. – B regresa 10 horas antes que A.

En efecto, sabemos que el tiempo empleado por un móvil en recorrer un trayecto con velocidad constante se calcula dividiendo el espacio por la velocidad; en consecuencia, los tiempos empleados por cada embarcación son:

Embarcación A	Viaje de ida,	1200	:	8	=	150	Horas
	Viaje de vuelta,	1200	:	12	=	100	Horas
	Tiempo total embarcación			*A*	=	250	Horas
Embarcación B	Viaje de ida,	1200	:	10	=	120	Horas
	Viaje de vuelta,	1200	:	10	=	120	Horas
	Tiempo total embarcación			*B*	=	240	Horas
Diferencia de tiempo a favor de *B* = 250 - 240					=	10	Horas

La Travesía Del Barquero

En la orilla de un río se encuentra un lobo, una cabra y un gran repollo; no hay más que un barquichuelo tan pequeño, que únicamente da cabida al barquero y a una sola de tales cosas. ¿En qué forma puede hacerse la travesía para evitar que el lobo se coma la cabra, o ésta al repollo, durante la ausencia del barquero?

Designemos con *L*, *C*, *R*, el lobo, la cabra y el repollo, respectivamente. Al partir tenemos:

PRIMERA ORILLA			SEGUNDA ORILLA		
L	***C***	***R***	.	.	.

A continuación indicamos como deberá el barquero efectuar los sucesivos pasajes:

I. – Transportará primeramente la cabra:

L	.	***R***	.	***C***	.

II. - En el segundo viaje transportará el lobo, pero regresará con la cabra; dejará a esta en la primera orilla y transportará el repollo:

.	***C***	.	***L***	.	***R***

III. - Regresará finalmente para transportar la cabra:

.	.	.	***L***	***C***	***R***

NOTA. – Otra solución se obtiene si, en el pasaje II, en lugar de transportar primeramente el lobo y luego el repollo, se transporta primeramente el repollo y luego el lobo.

Los Tres Maridos Celosos

Tres maridos se encuentran con sus respectivas mujeres ante un río que se proponen atravesar. Solo disponen de una pequeña embarcación sin barquero, apta para transportar únicamente dos personas a la vez. ¿Cómo estarán esas seis personas de manera que ninguna mujer quede en compañía de dos hombres, si su marido no está presente?

Este problema esa antiquísimo, y no es más que la generalización del anteriormente tratado, de la travesía del barquero.

Designemos *A*, *B*, *C*, a los maridos celosos y con *a*, *b* y *c*, sus mujeres respectivas. A la partida se tiene:

PRIMERA ORILLA			SEGUNDA ORILLA		
A	***B***	***C***	.	.	.
a	***b***	***c***	.	.	.

A continuación indicamos como deben efectuarse los sucesivos pasajes:

I. – Pasan primeramente dos mujeres:

A	***B***	***C***	**.**	**.**	**.**
.	**.**	***c***	***a***	***b***	**.**

II. – Una mujer regresa y se lleva a la tercera:

A	***B***	***C***	**.**	**.**	**.**
.	**.**	**.**	***a***	***b***	***c***

III. – Regresa una mujer, se queda con su marido, y luego pasan los otros dos maridos:

.	**.**	***C***	***A***	***B***	**.**
.	**.**	***c***	***a***	***b***	**.**

IV. – Un marido regresa con su mujer, a la que deja, y se lleva al otro marido:

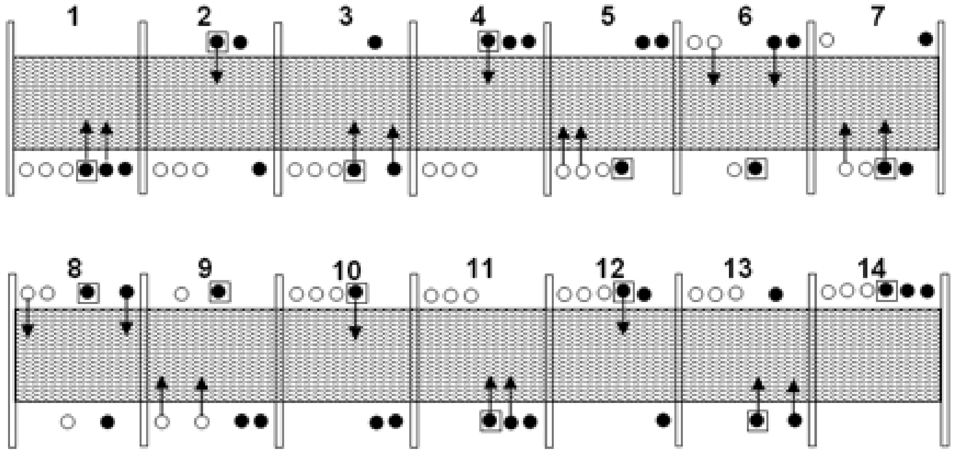
.	**.**	**.**	***A***	***B***	***C***
.	***b***	***c***	***a***	**.**	**.**

V. – La mujer ***a***, única que se encuentra en la segunda orilla, se encarga finalmente de la conducción sucesiva de las otras dos, o bien, después de conducir a una de ellas, cede la embarcación al marido de la tercera, que se encarga de su conducción.

Los Tres Blancos y los Tres Negros

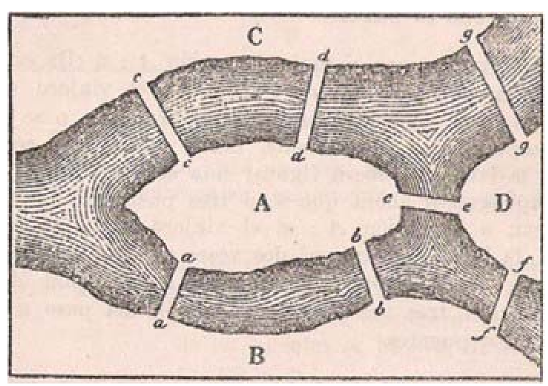
Tres blancos y tres negros se proponen cruzar un río; los tres blancos saben remar, y, de los negros, sólo un. El bote es de capacidad para dos personas. En ambas orillas tiene que haber siempre mayoría de blancos, o igualdad, peor nunca superioridad de negros. ¿Cómo realizar la travesía?

A continuación indicamos, esquemáticamente, los 14 viajes simples que debe realizar el bote. Los tres círculos señalan los hombres blancos y los tres puntos, los negros; hemos recuadrado el punto que indica el negro que sabe remar; las flechas indican el sentido del viaje, así como el hombre que lo realiza.



Problema de los Siete Puentes

En Koenisberg (Pomerania) existe una isla llamada Kueiphof; el río la rodea y divide en dos brazos, sobre los cuales están tendidos siete puentes a, b, c, d, e, f, g. ¿Será posible realizar un paseo atravesando no más de una vez todos los puentes?

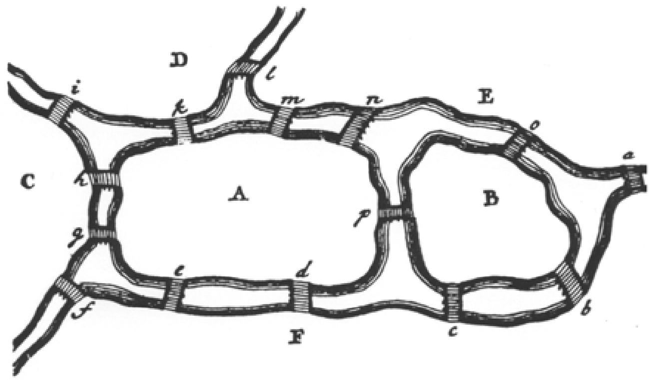


La notación A B D indicará tanto el camino A a B f D como el A b B f D; si se pasa por dos puentes tendremos que emplear, pues, tres letras para designar el camino.

Desde la época de la construcción de dichos puentes (año 1759), insignes matemáticos se ocuparon del problema, llegando a la conclusión que sería necesario construir otro puente para que el problema tuviera solución.

Cuéntase que un habitante de dicha ciudad se propuso resolverlo, prácticamente, recorriendo *de todas maneras posibles* los siete puentes, pero, como en el recorrido se hallaba un manicomio, parece que tuvieron que recluir en él al perseverante pomerano.

Evidentemente que con la sola experimentación resultará muy laborioso juzgar sobre la posibilidad o imposibilidad de resolver esta clase de problemas, pertenecientes a los llamados de *geometría de posición*; en ellos resulta generalmente más fácil de demostrar la imposibilidad que la posibilidad.



Como en el problema de los siete puentes de Koenisberg son los 5 los que conducen a la región A y 3 los que conducen a cada una de las regiones B, C y D, en la anotación del recorrido completo la letra A deberá aparecer tres veces, y cada una de las otras tres letras deberá aparecer 2 veces, en total: 3+2+2+2 = 9 letras, y no 8, como habíamos hallado antes. No existe, pues, posibilidad de resolver el problema propuesto.

Para el problema en cuestión, llamemos *A*, *B*, *C*, *D*, las diversas regiones separadas por los brazos del río.

Si se pasa de la región *A* a la *B*, ya sea por intermedio del puente a, o del b, es decir franqueando un puente, designaremos el camino por *AB*, o sea, con dos letras; la primera letra indica la región de partida, y la segunda, la de llegada.

La notación *A B D* indicará tanto el camino *A a B f D* como el *A b B f D*; si se pasa por dos puentes tendremos que emplear, pues, *tres* letras para designar el camino.

Si se pasa de la región *A* a la *B*, de ésta a la *D*, y finalmente a la *C*, designaremos el camino *A B C D*; es decir, que pasando por tres puentes, tendremos que emplear *cuatro* letras para designar el camino.

Observemos que el número de letras que designa un camino excede en 1 al de puentes a franquear. Para el problema de los 7 puentes de Koenisgberg, todo camino posible deberá designarse, pues, con 8 letras.

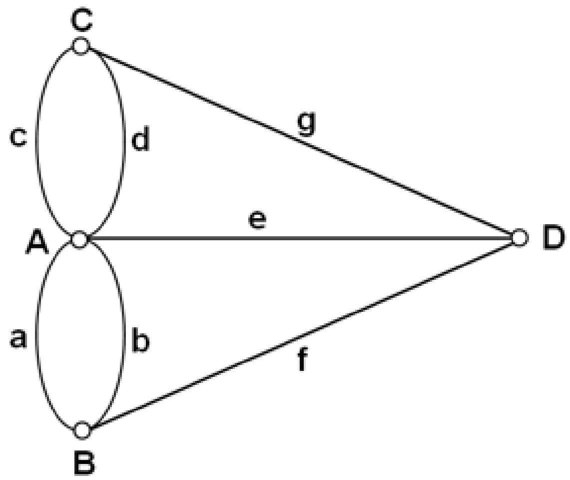
Estas 8 letras deberán estar dispuestas de modo que la sucesión de letras *A* y *B*, o sea, *A B* o *B A*, se presente *dos* veces; análogamente para la sucesión de letras *A* y *C*. En cambio la sucesión de letras *B* y *D*, o la de *C* y *D* se presentará una sola vez, porque las regiones que representan están unidas por *un* solo puente.

El problema se reduce, pues, a formar con las cuatro letras *A*, *B*, *C*, *D*, una sucesión de 8 letras en la que aparezcan las sucesiones binarias referidas tantas veces como hemos indicado. Pero antes de buscar tal disposición investiguemos si ello es posible.
Consideremos, por ejemplo, la región *A*; si ella estuviese unida a la *B* mediante *un* puente a, el viajero que lo atravesara, o se encuentra en A antes de pasar, o se encontrará después; por consiguiente, tanto en un caso como en el otro, la letra *A* deberá figurar una sola vez en la anotación. Supongamos ahora que sean tres puentes *a*, *b*, *c* que conduzcan a la región *A*; si el viajero atraviesa los tres puentes, la letra *A* aparecerá dos veces en la anotación. Análogamente, si cinco puentes conducen a la región *A*, esta letra figurará tres veces en la anotación del paso a través de todos los puentes.
Como en el problema de los siete puentes de Koenisberg son los 5 los que conducen a la región *A* y 3 los que conducen a cada una de las regiones *B*, *C* y *D*, en la anotación del recorrido completo la letra *A* deberá aparecer tres veces, y cada una de las otras tres letras deberá aparecer 2 veces, en total: 3+2+2+2 = 9 letras, y no 8, como habíamos hallado antes. No existe, pues, posibilidad de resolver el problema propuesto.
A continuación presentamos otro caso de cruce de puentes, pero cuya solución es posible; una de ellas es la siguiente:

D l E q B p A n E m A k D i C h A g C f F e A d F c B b F a E

Figuras de un Solo Trazo

El problema de los siete puentes, que tratamos recientemente, se puede representar, esquemáticamente, con la (figura *a*).



(Figura *a*)

En general, si una figura como la indicada puede dibujarse mediante un solo trazo recorriendo una sola vez todas las partes que la componen el problema de los puentes es posible, de lo contrario no lo es.
En dichas figuras llamaremos nudos a los puntos como *A*, *B*, *C*,… de los cuales parten los trazos los *trazos* de líneas que unen un nudo con otro.

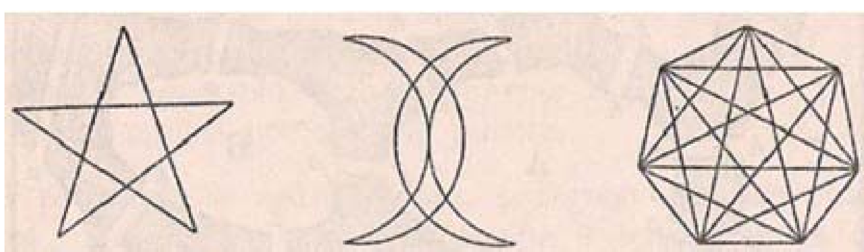


Figura b *Figura c* *Figura d*

Se llama *orden* de un nudo al dado por el número de trazos que de él parten; así, por ejemplo, el orden del nudo *A* es 5, el de *B* es 3.
Si logramos recorrer toda una figura compuesta de líneas, ya sea en el plano o en el espacio, mediante un solo trazo, volviendo al punto de partida, decimos que hemos recorrido un circuito cerrado. La posibilidad de realización de tal circuito está sujeta a las siguientes condiciones:

Las figuras que no tienen nudos de orden impar se pueden dibujar con un trazo continuo partiendo de un nudo cualquiera (figuras b, c, d).

La (figura *b*) representa el pentágono regular estrellado, símbolo que empleaban los pitagóricos para reconocerse (siglo V antes de Cristo).

La (figura *c*) representa la firma de Mahoma, formada por dos medias lunas opuestas, y que, según la tradición, trazaba el Profeta con la punta de su cimitarra.

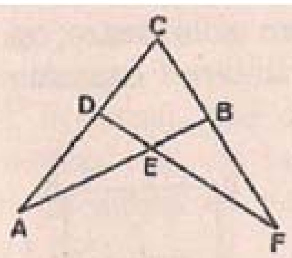
La (figura d) es un heptágono con todas sus diagonales. En general, todo polígono de un número impar de lados, con sus respectivas diagonales, es una figura de circuito cerrado, mientras que no lo es, si tiene un número par de lados.

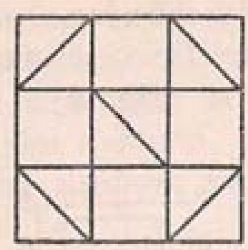
Como otro ejemplo interesante, si se dividen los tres lados del triángulo en un mismo número cualquiera de partes iguales, y se unen los puntos de división correspondientes por rectas paralelas a los lados, se obtiene una figura que no contiene más que nudos de orden par, y se puede describir, pues, con un solo trazo.

Cuando una figura tiene solamente dos nudos impares, puede describirse con trazo continuo partiendo de uno de dichos nudos.

Así, por ejemplo, la (figura *f*) puede describirse en cualquier sentido con tal que se parta de uno de sus nudos impares *B* o *D*.

Las figuras (*g*, *h*, *i*) se hallan en las mismas condiciones; la (figura *i*) solo contiene los dos nudos impares *A* y *Z*.





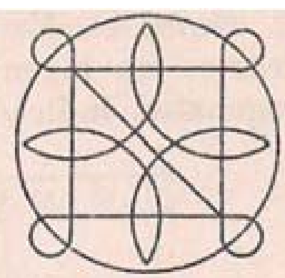


Figura f *Figura g* *Figura h*

Dibujando en grande sobre una hoja de cartón esta última figura, puede realizarse un juego interesante. Se colocan luego fichas pequeñas sobre el centro de todas las líneas que unen los puntos contiguos; el juego consiste en determinar el recorrido a seguir para levantar todas las fichas sucesivamente.

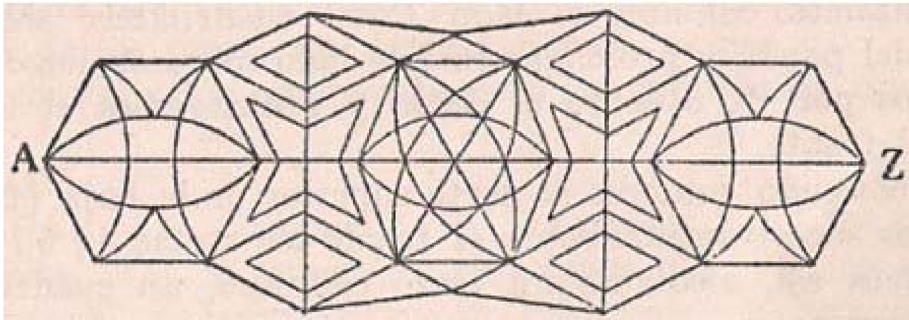


Figura l

Las figuras que tienen más de dos nudos impares no pueden describirse con un trazo continuo.

Puede agregarse que, *si una figura tiene (2n) nudos impares, puede describirse completamente mediante (n) recorridos diferentes.*

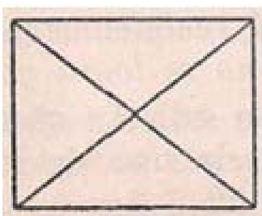
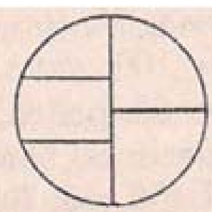
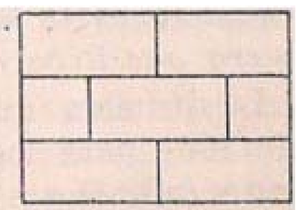




Figura k *Figura m* *Figura n*

Así, por ejemplo, las (figuras *k*, *m*, *n*) presentan el caso de imposibilidad que hemos señalado. La (figura *k*) se puede describir mediante *dos* recorridos, porque tiene *cuatro* nudos impares; la (figura *m*), que tiene *ocho* nudos impares, mediante cuatro recorridos, y la (figura *n*), que tiene *doce* nudos impares, mediante *seis* recorridos.

NOTA. – Es posible dibujar, con un solo trazo, si empleamos un ingenioso artificio, el cuadrilátero con sus dos diagonales, indicado en la (figura *k*).

En efecto, sea *A B C D* (figura *p*) la hoja de papel que emplearemos para el trazado.

Rebatimos la parte superior efectuando un doblez por *E F* (figura *q*).

Trazamos entonces el lado 1 del cuadrilátero sobre el frente del papel, y prolongamos este lado sobre el dorso; continuamos por 2, 3 sobre el dorso y prolongamos el lado 3 sobre el frente.

Rebatiendo entonces la parte superior de la hoja (figura *r*), trazamos sucesivamente sobre el frente las rectas 4, 5, 6, 7. Obtenemos así, mediante un trazo continuo, un cuadrilátero y sus diagonales.

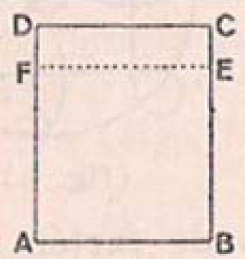


Figura p

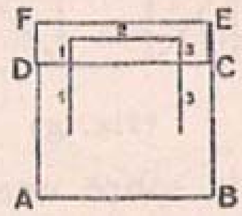


Figura q

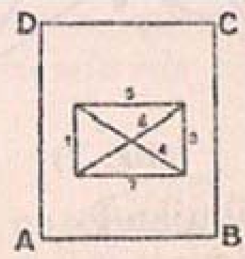


Figura r